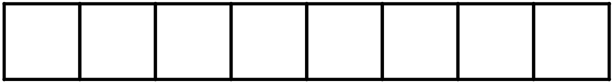
Matematyczne kolorowanki

Tomasz Szemberg

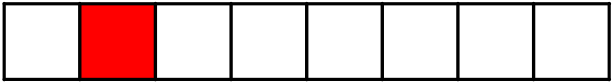
Wykład dla studentów IM UP
Kraków, 18 maja 2016

Dany jest prostokąt podzielony na 8 pól. Gracze zamalowują pola na zmianę. Jeden na kolor czerwony, a drugi na kolor niebieski.



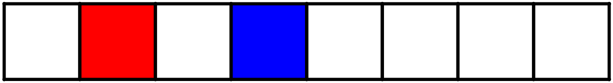
Gra wstępna

Dany jest prostokąt podzielony na 8 pól. Gracze zamalowują pola na zmianę. Jeden na kolor czerwony, a drugi na kolor niebieski.



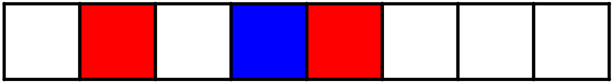
Gra wstępna

Dany jest prostokąt podzielony na 8 pól. Gracze zamalowują pola na zmianę. Jeden na kolor czerwony, a drugi na kolor niebieski.

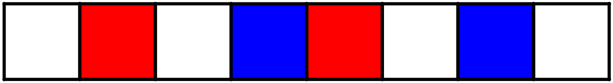


Gra wstępna

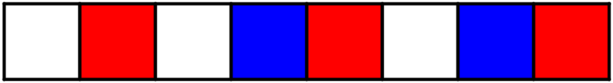
Dany jest prostokąt podzielony na 8 pól. Gracze zamalowują pola na zmianę. Jeden na kolor czerwony, a drugi na kolor niebieski.



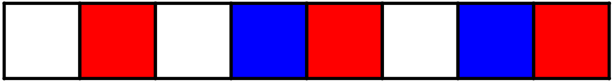
Dany jest prostokąt podzielony na 8 pól. Gracze zamalowują pola na zmianę. Jeden na kolor czerwony, a drugi na kolor niebieski.



Dany jest prostokąt podzielony na 8 pól. Gracze zamalowują pola na zmianę. Jeden na kolor czerwony, a drugi na kolor niebieski.

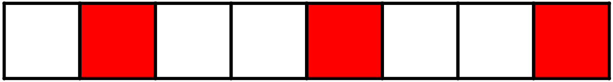


*Gra kończy się, jeśli na planszy znajdą się trzy pola w tym samym kolorze położone tak, że **środkowe** spośród tych trzech pól jest w **tej samej odległości** od pola na lewo od niego i od pola na prawo od niego (czyli tworzą **ciąg arytmetyczny**). Właściciel tego koloru **przegrywa**.*



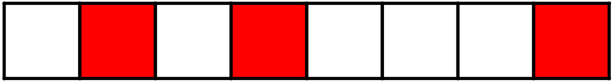
Cel gry wstępnej

Gra kończy się, jeśli na planszy znajdą się trzy pola w tym samym kolorze położone tak, że ***środkowe*** *spośród tych trzech pól jest w* ***tej samej odległości*** *od pola na lewo od niego i od pola na prawo od niego (czyli tworzą* ***ciąg arytmetyczny****). Właściciel tego koloru* ***przegrywa****.*

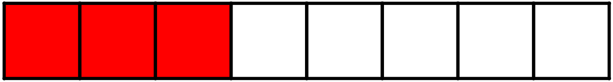


Cel gry wstępnej

Gra kończy się, jeśli na planszy znajdą się trzy pola w tym samym kolorze położone tak, że ***środkowe*** *spośród tych trzech pól jest w* ***tej samej odległości*** *od pola na lewo od niego i od pola na prawo od niego (czyli tworzą* ***ciąg arytmetyczny****). Właściciel tego koloru* ***przegrywa****.*

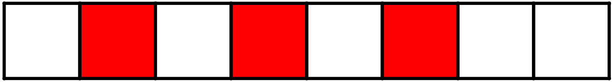


Gra kończy się, jeśli na planszy znajdą się trzy pola w tym samym kolorze położone tak, że ***środkowe*** *spośród tych trzech pól jest w* ***tej samej odległości*** *od pola na lewo od niego i od pola na prawo od niego (czyli tworzą* ***ciąg arytmetyczny****). Właściciel tego koloru* ***przegrywa****.*



Cel gry wstępnej

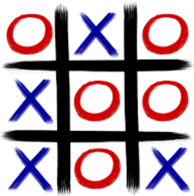
> *Gra kończy się, jeśli na planszy znajdą się trzy pola w tym samym kolorze położone tak, że **środkowe** spośród tych trzech pól jest w **tej samej odległości** od pola na lewo od niego i od pola na prawo od niego (czyli tworzą **ciąg arytmetyczny**). Właściciel tego koloru **przegrywa**.*



Remis *zdarza się stosunkowo często.*

Remis *zdarza się stosunkowo często.*

To czyni tę grę prawie tak nudną jak ***kółko i krzyżyk****.*

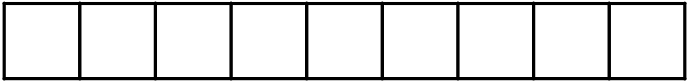


Kółko i krzyżyk można uratować przez dopuszczenie gry na ***nieograniczonym*** *(w teorii) polu i wymaganie do wygranej* 5 *kółek lub krzyżyków w jednym rzędzie.*

Gra wstępna, więcej miejsca

Kółko i krzyżyk można uratować przez dopuszczenie gry na ***nieograniczonym*** *(w teorii) polu i wymaganie do wygranej* 5 *kółek lub krzyżyków w jednym rzędzie.*

My dodamy tylko ***jedno pole****. W ten sposób mamy teraz* 9 *pól.*



Twierdzenie

Nie można otrzymać remisu w grze z kolorowaniem pól na planszy mającej 9 lub więcej pól.

Twierdzenie (van der Waerden (1903-1996))

*Dla dowolnej liczby r **kolorów** i dowolnej liczby k oznaczającej **długość ciągu arytmetycznego**,*
***istnieje** liczba*

$$W(r, k)$$

*taka, że **dowolne** pokolorowanie liczb od 1 do $n \geqslant W(r, k)$ zawiera monochromatyczny podciąg arytmetyczny długości co najmniej k.*

Uwaga

Widzieliśmy właśnie („udowodnili"), że

$$W(2,3)=9.$$

Uwaga

Widzieliśmy właśnie („udowodnili”), że

$$W(2,3) = 9.$$

Problem

Czy istnieje ***efektywna*** *wersja twierdzenia van der Waerdena?*

Przykład

Znane są następujące liczby:

$$W(2,3)=9,\quad W(2,4)=35,\quad W(2,5)=178,\quad W(2,6)=1132,$$

Przykład

Znane są następujące liczby:

$$W(2,3) = 9, \quad W(2,4) = 35, \quad W(2,5) = 178, \quad W(2,6) = 1132,$$

$$W(3,3) = 27, \quad W(3,4) = 293,$$

Przykład

Znane są następujące liczby:

$$W(2,3) = 9, \quad W(2,4) = 35, \quad W(2,5) = 178, \quad W(2,6) = 1132,$$

$$W(3,3) = 27, \quad W(3,4) = 293,$$

$$W(4,3) = 76$$

Twierdzenie

Istnieje następujące ***uniwersalne*** *ograniczenie górne podane przez Timothy'ego Goversa (1963-...):*

$$W(r,k) \leqslant 2^{2^{r^{2^{2^{k+9}}}}}.$$

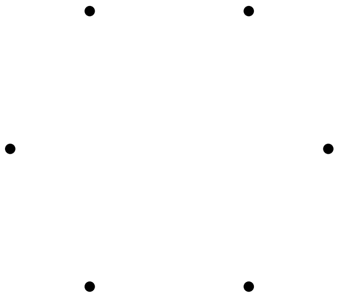
Twierdzenie

*Istnieje następujące **uniwersalne** ograniczenie górne podane przez Timothy'ego Goversa (1963-...):*

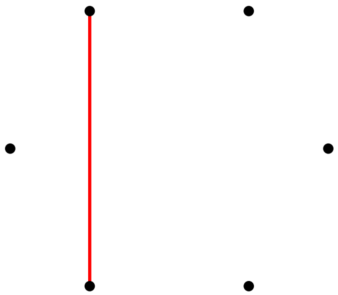
$$W(r,k) \leqslant 2^{2^{r^{2^{2^{k+9}}}}}.$$

*To są **ogromne** liczby i to szacowanie zostawia wiele miejsca na ulepszenie.*

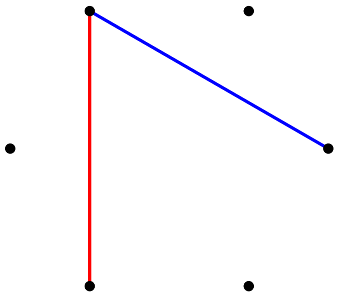
Danych jest 6 punktów. Gracze na zmianę łączą punkty kolorowymi odcinkami, jeden odcinkami w kolorze czerwonym, a drugi w kolorze niebieskim.



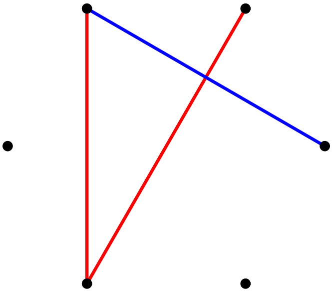
Danych jest 6 punktów. Gracze na zmianę łączą punkty kolorowymi odcinkami, jeden odcinkami w kolorze czerwonym, a drugi w kolorze niebieskim.



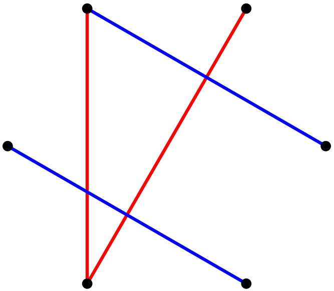
Danych jest 6 punktów. Gracze na zmianę łączą punkty kolorowymi odcinkami, jeden odcinkami w kolorze czerwonym, a drugi w kolorze niebieskim.



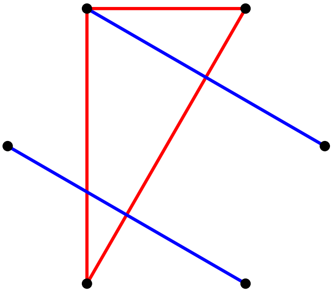
Danych jest 6 punktów. Gracze na zmianę łączą punkty kolorowymi odcinkami, jeden odcinkami w kolorze czerwonym, a drugi w kolorze niebieskim.



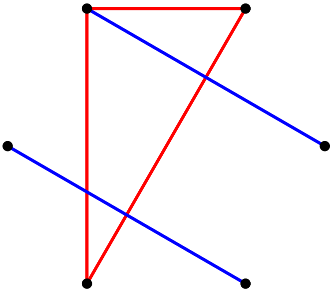
Danych jest 6 punktów. Gracze na zmianę łączą punkty kolorowymi odcinkami, jeden odcinkami w kolorze czerwonym, a drugi w kolorze niebieskim.



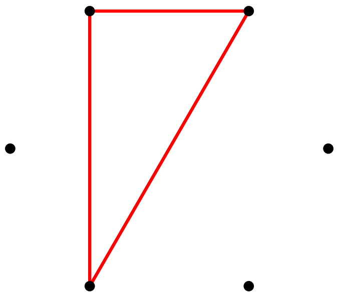
Danych jest 6 punktów. Gracze na zmianę łączą punkty kolorowymi odcinkami, jeden odcinkami w kolorze czerwonym, a drugi w kolorze niebieskim.



Gra się kończy w momencie, gdy można wskazać ***trójkąt*** *z wierzchołkami w wyjściowych punktach i wszystkimi bokami w jednym kolorze. Właściciel tego koloru* ***przegrywa*** *grę.*

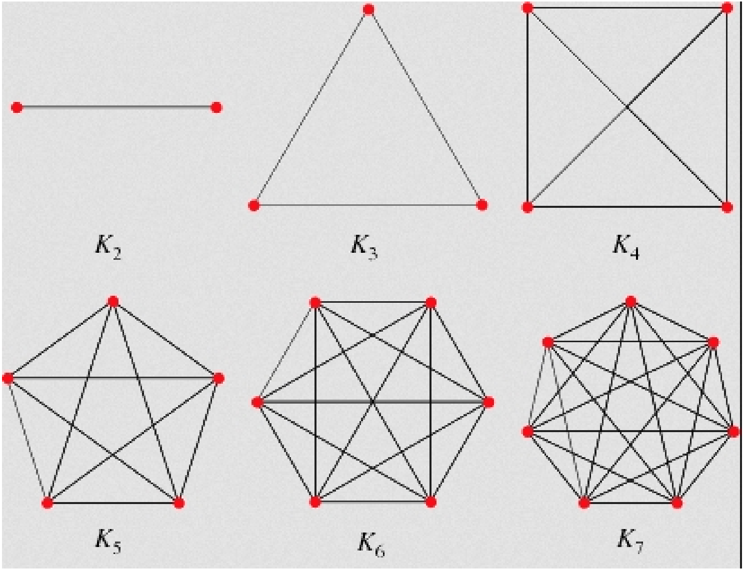


Gra się kończy w momencie, gdy można wskazać ***trójkąt*** *z wierzchołkami w wyjściowych punktach i wszystkimi bokami w jednym kolorze. Właściciel tego koloru* ***przegrywa*** *grę.*



Twierdzenie

*Nie można uzyskać **remisu** w grze w kolorowanie odcinków dla* 6 *lub więcej punktów.*


K_2
K_3
K_4
K_5
K_6
K_7

Twierdzenie (Ramseya (1903-1930))

*Graf zupełny K_6 (na sześciu wierzchołkach) pokolorowany dowolnie dwoma kolorami zawsze zawiera zupełny **monochromatyczny** podgraf K_3 (czyli trójkąt).*

Twierdzenie (Ramseya (1903-1930))

Graf zupełny K_6 (na sześciu wierzchołkach) pokolorowany dowolnie dwoma kolorami zawsze zawiera zupełny ***monochromatyczny*** *podgraf K_3 (czyli trójkąt).*

Twierdzenie

*Dla dowolnych liczb naturalnych r oraz s istnieje liczba $R(r, s)$ (**liczba Ramseya**) taka, że zupełny graf K_n o*

$$n \geqslant R(r, s) \quad \text{wierzchołkach}$$

pokolorowany na ***czerwono*** *i* ***niebiesko*** *zawiera*

- ***monochromatyczny*** *zupełny podgraf K_r pomalowany na niebiesko lub*
- ***monochromatyczny*** *zupełny podgraf K_s pomalowany na czerwono.*

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb naturalnych c oraz $r_1, \ldots, r_c$ istnieje liczba

$$R(r_1, \ldots, r_c)$$

taka, że dla zupełnego grafu K_n z

$$n \geqslant R(r_1, \ldots, r_c) \quad \textit{wierzchołkami}$$

pomalowanego dowolnie z użyciem c kolorów, istnieje indeks i taki, że

$$K_n \textit{ zawiera zupełny podgraf } K_{r_i} \textit{ pomalowany na kolor } i.$$

Problem

Jak efektywne jest twierdzenie Ramseya?

Problem

Jak efektywne jest twierdzenie Ramseya?

Przykład

Znane liczby Ramseya to

$$R(1,s)=1,\quad R(2,s)=s,$$

$$R(3,3)=6,\quad R(4,4)=18,$$

$$R(3,3,3)=17.$$

Problem

Jak efektywne jest twierdzenie Ramseya?

Przykład

Znane liczby Ramseya to

$$R(1,s)=1,\quad R(2,s)=s,$$

$$R(3,3)=6,\quad R(4,4)=18,$$

$$R(3,3,3)=17.$$

Przykład

Wiadomo, że

$$43 \leqslant R(5,5) \leqslant 49.$$

Problem (Möbius 1840, Guthrie 1852, Cayley 1879)

Czy istnieje ograniczenie górne na liczbę kolorów niezbędnych do pokolorowania dowolnej mapy?

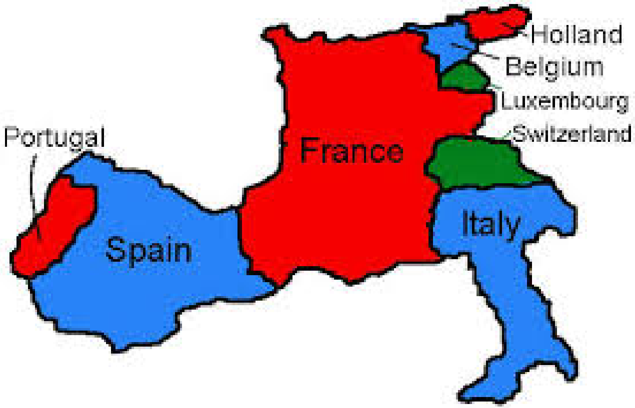
Problem (Möbius 1840, Guthrie 1852, Cayley 1879)

Czy istnieje ograniczenie górne na liczbę kolorów niezbędnych do pokolorowania dowolnej mapy? A może liczba potrzebnych kolorów zależy od liczby państw na mapie?

Łatwa mapa


Holland
Belgium
Luxembourg
Switzerland
Portugal
France
Spain
Italy

Łatwe rozwiązanie



Twierdzenie (Heawood 1890)

Pięć *kolorów wystarcza do pomalowania dowolnej mapy.*

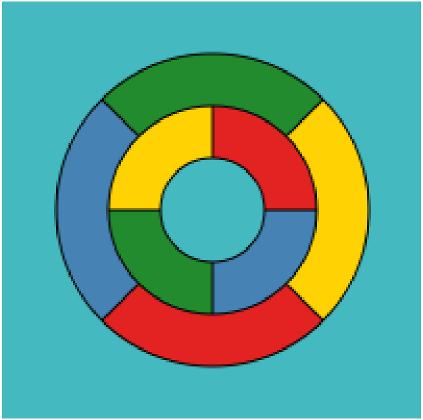
Twierdzenie (Heawood 1890)

Pięć *kolorów wystarcza do pomalowania dowolnej mapy.*

Problem

Czy ***cztery*** *kolory wystarczają?*

Mapa w 5 kolorach



Twierdzenie (Appel, Haken oraz . . . IBM 1976)

Cztery *kolory wystarczają do pomalowania dowolnej mapy.*

Dziękuję za uwagę